Humanberufliche Schulen

Didaktische Schmankerl aus Angewandter Mathematik

Handreichung für einen lebendigen Unterricht

Mai 2020

Vorwort

Die vorliegende Handreichung ist eine Zusammenstellung von sehr konkreten, innovativen Unterrichtssequenzen zu einzelnen Kompetenzen des Lehrplans des Pflichtgegenstandes Angewandte Mathematik und soll allen Pädagoginnen und Pädagogen dieser Fachgruppe eine Unterstützung ihrer Unterrichtstätigkeit sein.

In dieser Auflage finden Sie kreativen Zugängen zu Einstiegen, zu Vermittlungsphasen, zu Arbeits- und Übungsphasen sowie zur Beendigung von Unterrichtssequenzen sowie auch ganze Unterrichtseinheiten zu folgenden Kompetenzen:

Kompetenz - Lehrstoff	Angabe des Semesters	Angabe des Lehrplans
Zahlen und Maße	1 Jahrgang/1. Semester	2016 HLW, HLT, ALW
Algebra und Geometrie	1.Jahrgang/1. Semester	2016 HLW, HLT, ALW
Funktionale Zusammenhänge	1.Jahrgang/2. Semester	2016 HLW, HLT, ALW
Finanzmathematik	5. Semester /4. Semester	2016 HLW, HLT, ALW
Beschreibende Statistik	6. Semester/4. Semester	2016 HLW, HLT, ALW
Beschreibende Statistik	7. Semester/4. Semester	2016 HLW, HLT, ALW

Die Möglichkeit zur individuellen Förderung von SchülerInnen wird dabei berücksichtigt.

Wie alle unsere Handreichungen soll auch diese laufend aktualisiert und erweitert werden. Wir freuen uns daher sehr, wenn Sie uns weitere Beiträge zur Verfügung stellen. Bitte schicken Sie diese an arge.mathematik@humwien.at. Die jeweils aktuelle Version finden Sie unter www.humwien.at.

Initiiert wurde dieses Projekt von Schulqualitätsmanagerin Mag. Dr. Alexandra Metz-Valny mit Unterstützung von Dipl.Päd. Ulrike Hlavin. Vielen Dank für die guten Inputs sowie den Einsatz bei der Umsetzung an die Arbeitsgemeinschaftsleiterinnen Mag. Ulrike Blanckenstein und Martina Kralicek.

Für diese Handreichung wurden im Rahmen von Landesarbeitsgemeinschaftstreffen Erfahrungen zusammengetragen, Erprobtes wurde diskutiert und eine Auswahl zusammengestellt. Die Inhalte sind also von Unterrichtenden für Unterrichtende.

Für die Beträge geht ein herzliches Dankeschön an die Fachkoordinatorinnen und Fachkoordinatoren sowie an alle Kolleginnen und Kollegen, die Angewandte Mathematik an einer humanberuflichen Schule in Wien unterrichten.

Bildungsdirektion Wien

Inhalt

1 Zahlen und Maße

1.1 Rechnen mit Prozent

1.1.1 Aufgaben mit Lösungswort

1

Berechnen Sie den Wert, der sich ergibt, wenn 500 € um 12 % erhöht werden.

1) 480€ M
2) 560€ I
3) 570€ A
4) 630€ P

2

Berechnen Sie den Wert, der sich ergibt, wenn 120 kg um 3 % abnehmen.

1) 116,4 kg C
2) 117 kg A
3) 121 kg R
4) 115,6 kg I

3

Ein Ameisenköder enthält 0,8 g Wirkstoff pro 1 kg Masse.
Bestimmen Sie den prozentuellen Anteil des Wirkstoffs.

1) 8 % T
2) 0,8 % M
3) 0,08 % H
4) 0,008 % O

4

Aus einem leck gewordenen ursprünglich mit 60 L vollgefüllten Benzintank sind 2,4 L Benzin ausgeflossen.
Ermitteln Sie den Verlust in Prozent.

1) 0.04 % E
2) 40 % H
3) 0,4 % Z
4) 4 % B

5

Eine Monatsmiete betrug € 450. Sie wurde dann um 12 % erhöht.
Berechnen Sie, wie viel jetzt bezahlt werden muss.

1) € 501 O
2) € 502 A
3) € 503 E
4) € 504 I

6

Der Preis eines Artikels stieg um 8 % auf € 226,80.
Ermitteln Sie den ursprünglichen Preis.

1) € 208 T
2) € 208,66 K
3) € 210 N
4) € 210,66 M

7

Der Preis eines Kleides wird im Sommerschlussverkauf um 20 % gesenkt.
Es kostete ursprünglich € 128.
Berechnen Sie den jetzigen Preis.

1) € 102,4 G
2) € 153,6 A
3) € 160 R
4) € 115 E

8

Der Preis einer Jacke wird im Winterschlussverkauf um 20 % gesenkt. Sie kostet jetzt € 128.
Berechnen Sie den ursprünglichen Preis.

1) € 102,4 I
2) € 153,6 C
3) € 160 U
4) € 115 E

9

Eine um 40 % ermäßigte Fahrkarte für den öffentlichen Verkehr kostet 1,20 €.
Ermitteln Sie den vollen Preis für die Fahrkarte.

1) 2 € T
2) 1,68 € P
3) 2,5 € E
4) 0,80 € R

10

Der Jahresumsatz eines Betriebes betrug € 8 Millionen im ersten Jahr. Im zweiten Jahr sank der Umsatz um 2 %, er stieg aber im dritten Jahr wieder im Vergleich zum zweiten Jahr um 8 %.
Bestimmen Sie den Umsatz im dritten Jahr.

1) € 8 345 600 H
2) € 7 840 000 A
3) € 8 640 000 O
4) € 8 467 200 I

11

Eine Marktverkäuferin kauft 30 Steigen Erdbeeren um je € 10,50. Sie schlägt auf den Einkaufspreis 60 % auf und verkauft 25 Steigen. Kurz vor Verkaufsschluss senkt sie den Verkaufspreis um 50 % und schafft es so, auch die übrigen Steigen noch zu verkaufen.
Berechnen Sie die Höhe der Einnahmen in Euro.

1) € 462 N

2) € 147 K

3) € 352 S

4) € 183 U

12

Der Preis eines Artikels exklusive Umsatzsteuer (Nettopreis) beträgt € 1000. Dazu kommt noch die Umsatzsteuer von 20 %. Beim Kauf wurde ein Rabatt von 5 % vereinbart. Der Käufer hat zwei Möglichkeiten den Rabatt zu beziehen:

1. Rabatt auf den Preis exklusive Umsatzsteuer
2. Rabatt auf den Preis inklusive Umsatzsteuer

Beurteilen Sie, welche der beiden Optionen für den Käufer günstiger ist?

1) Option 1 F

2) Option 2 U

3) Beide Optionen kosten gleich viel. M

13

Mogelpackung: Ein Pflegemittel wurde bisher in einer Menge von
300 ml zu einem Preis von € 1,80 angeboten. Neuerdings wird das Produkt in der gleichen Packung in einer Menge von nur noch 250 ml zum gleichen Preis angeboten.
Ermitteln Sie, wie hoch der gerechte Preis für 250 ml sein sollte.

1) € 1,40 D

2) € 1,60 G

3) € 1,90 E

4) € 1,50 A

14

Ein Becher Fruchtjoghurt mit 200 g Inhalt kostete früher € 0,79.
Jetzt sind bei gleichem Preis nur noch 180 g im Becher.
Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich dadurch der Preis erhöht hat.

1) 10 % S

2) 11,11 % T

3) 90 % U

4) 9,99 % V

15

Die jährliche Prämie für eine Gebäudeversicherung beträgt 0,03 % des Gebäudewertes, was € 70 entspricht.

Berechnen Sie den Wert des Gebäudes.

1) € 23 333,33 B
2) € 2 333,33 F
3) € 233 333,33 H
4) € 2 333 333,33 P

16

Im Monat Juli stellte die Firma Speedo 2750 Schwimmflügel her. Dies waren um 10 % mehr als im Juni.

Berechnen Sie die Anzahl der produzierten Schwimmflügel im Juni.

1) 2500 E
2) 2475 U
3) 2640 W
4) 2538 Z

17)

Finden Sie die richtigen Aussagen und ordne die Buchstaben den korrekten Zeilen zu:

17	Erhöhung um 100 %	
18	Senkung um 50 %	
19	Erhöhung um 200 %	
20	Senkung um 75 %	
21	Senkung um 100 %	

K	kostenlos
M	Der Preis verdoppelt sich
T	Der Preis verdreifacht sich.
A	Der Preis halbiert sich.
I	Der Preis viertelt sich.

Lösungswort: Ich bin gut in Mathematik

1.1.2 Aufgaben aus dem Alltag – Klapptest

1) Eine Waschmaschine kostet regulär € 950. Du bekommst 5% Rabatt. Berechne wie viel Du für die Waschmaschine zahlen musst.	1) $950 \cdot 0{,}95 = \ 902{,}5$ Die Waschmaschine kostet vergünstigt noch € 902,5.
2) Eine Hose kostet € 67. Im Abverkauf werden 15 % nachgelassen. Berechne den Preis der Hose nach Abzug der 15 %.	2) $67 \cdot 0{,}85 = 56{,}95$ Die Hose kostet reduziert € 56,95.
3) Ein Smartphone kostet 987€. Sie haben einen 10 %-Gutschein. Berechne, wie viel Du für das Smartphone nach Abzug der 10 % zahlen müssen.	3) $100 - 10 = 90$ $987 \cdot 0{,}9 = 888{,}3$ € Das Handy kostet 888,3 €.
4) Ein Teppich kostet ohne Mehrwertsteuer € 140. Der MwSt.-Satz beträgt 20 %. Berechne, wie viel Du für den Teppich mit Mehrwertsteuer zahlen müssen.	4) $140 \cdot 1{,}2 = \ 168$ Der Teppich kostet mit MwSt. 168 €.
5) Ein Haarschnitt bei Friseurin Nicola kostet € 24. Du hast einen Aktionsgutschein mit 5 % Preisnachlass. Berechne, wie viel Du für den Haarschnitt nach Abzug des Preisnachlasses zahlst.	5) $100 - 5 = 95$ $24 \cdot 0{,}95 = 22{,}8$ Ich muss 22,8 € für den Haarschnitt zahlen.
6) Eine Impfung gegen Tetanus kostet € 9,20. Die Krankenkassa übernimmt 85 % der Kosten. Berechne, welchen Geldbetrag Du von der Krankenkasse zurückbekommst.	6) $9{,}20 \cdot 0{,}85 = 7{,}82$ Ich bekomme 7,82 € von der Krankenkassa zurück.
7) Eine Impfung gegen Cholera kostet € 69,25. Die Krankenkassa übernimmt 70 % der Kosten. Berechne, welchen Geldbetrag Du von der Krankenkasse zurückbekommst.	7) $69{,}25 \cdot 0{,}7 \ = 48{,}475$ Ich bekomme von der Krankenkassa 48,48 € zurück.
8) Eine Impfung gegen Gelbfieber kostet € 56,20. Die Krankenkassa übernimmt 45 % der Kosten. Berechne, welchen Geldbetrag Du von der Krankenkasse zurückbekommst.	8) $56{,}2 \cdot 0{,}45 = 25{,}29$ Ich bekomme von der Krankenkassa 25,29 € zurück.
9) Eine Übernachtung im Hotel Seestadt kostet € 50 in der Hauptsaison. In der Nebensaison erhält man 20 % Preisnachlass. Berechne, wie viel die Übernachtung in der Nebensaison kostet.	9) $100\ \% - 20\ \% = 80\ \%$ $50 \cdot 0{,}8 = \ 40$ Die Übernachtung kostet in der Nebensaison 40 €.
10) Ein Flug nach Istanbul kostet € 325. Kinder unter 2 Jahren zahlen nur 20 % des regulären Preises. Berechne, wie viel Du für ein Kind unter 2 Jahren zahlen musst.	10) $325 \cdot 0{,}2 = 65.$ Das Kinderticket kostet 65 €.
11) Ein Motorrad kostet € 8.739. Der Preis des Motorrads wird um 3 % erhöht. Berechne den neuen Kaufpreis.	11) $8739 \cdot 1{,}03 = 9001{,}17.$ Das Motorrad kostet 9001,17 € nach der Preiserhöhung.

12) Sonderangebotswoche in deiner Lieblingsboutique: Markenjeans, Preis € 95,-, werden um 30 % billiger angeboten. Berechne, wie viel die Jeans nach der Reduktion kostet.	12) $100 - 30 = 70$ $95 \cdot 0{,}7 = 66{,}5$ Die Markenjeans kostet € 66,5.
13) Durch den Einbau neuer, gut isolierter Fenster spart eine Familie 48 % Heizkosten im Jahr. Berechne, wie viel die Familie spart, wenn sie bisher € 2.500 jährlich gezahlt hat.	13) $2500 \cdot 0{,}48 = 1200.$ Die Familie erspart sich 1200 € - d.h. sie zahlt nun nur noch 1300 € jährlich.
14) Ein Grundstück wird um € 92.000 angeboten. Berechnen Sie, wie viel der Käufer bezahlen muss, wenn noch 3,5 % Grunderwerbssteuer zu berücksichtigen sind?	14) $92000 \cdot 1{,}035 = 95220$ Der Käufer muss inkl. Grunderwerbssteuer 95.220 € zahlen.
15) Der Preis für ein Computerspiel - bisheriger Preis € 94 wird um 6 % erhöht. Berechnen Sie, den Preis des Computerspiels nach der Preiserhöhung.	15) $94 \cdot 1{,}06 = 99{,}64$ Das Computerspiel kostet nach der Preiserhöhung 99,64 €.
16) Ein Anzug kostet € 120. Im Schlussverkauf wird der Preis um 25 % reduziert. Berechnen Sie, den Preis des Anzugs nach der Reduktion.	16) $100 - 25 = 75$ $120 \cdot 0{,}75 = 90.$ Der Anzug kostet € 90.
17) Ein Tablet kostet ohne Mehrwertsteuer € 185. Beim Kauf kommen 20 % Mehrwertsteuer hinzu. Berechnen Sie, wie viel das Tablet mit Mehrwertsteuer kostet.	17) $185 \cdot 1{,}2 = 222$ Das Tablet kostet mit MwSt. 222 €.
18) Herr Müller hat eine Rechnung von € 1 765 nicht rechtzeitig bezahlt, daher wird ihm ein Zuschlag von 3 % verrechnet. Berechnen Sie, wie viel Herr Müller mit dem Zuschlag von 3 % zahlen muss.	18) $1765 \cdot 1{,}03 = 1817{,}95$ Herr Müller muss 1817,95 € bezahlen.
19) Ein Modegeschäft bietet eine Aktion für Neukunden an. Ab einer Einkaufssumme von € 200 werden 5 % auf den nächsten Einkauf gutgeschrieben. Berechnen Sie, wie viel ist die Gutschrift für eine Einkaufssumme vom € 785,9 beträgt.	19) $785{,}9 \cdot 0{,}05 = 39{,}295$ Die Gutschrift beträgt 39,30 €.
20) Ein Haus mit Garten wird um € 695.000 angeboten. Berechnen Sie, wie viel ein Käufer bezahlen muss, wenn auch noch 3,5 % Grunderwerbssteuer zu berücksichtigen sind.	20) $695000 \cdot 1{,}035 = 71932{,}5$ Das Haus mit Garten kostet inkl. Grunderwerbssteuer 71932,5 €.
21) Eine Übernachtung im Hotel Mozart kostet in der Hauptsaison € 160. In der Nebensaison erhält man 10% Preisnachlass. Berechnen Sie, wie viel eine Übernachtung in der Nebensaisonkostet.	22) $100\,\% - 10\,\% = 90\,\%$ $160 \cdot 0{,}9 = 144$ Die Übernachtung kostet 144 €.
23) Herr Meier hat eine Rechnung von € 8.456 nicht rechtzeitig bezahlt, daher wird ihm ein Zuschlag von 3 % verrechnet. Berechnen Sie, wie viel Herr Meier bezahlen muss.	23) $8456 \cdot 1{,}03 = 8709{,}68$ Herr Meier muss € 8709,68 zahlen.

1.1.3 Prozentrechnung – Bingo

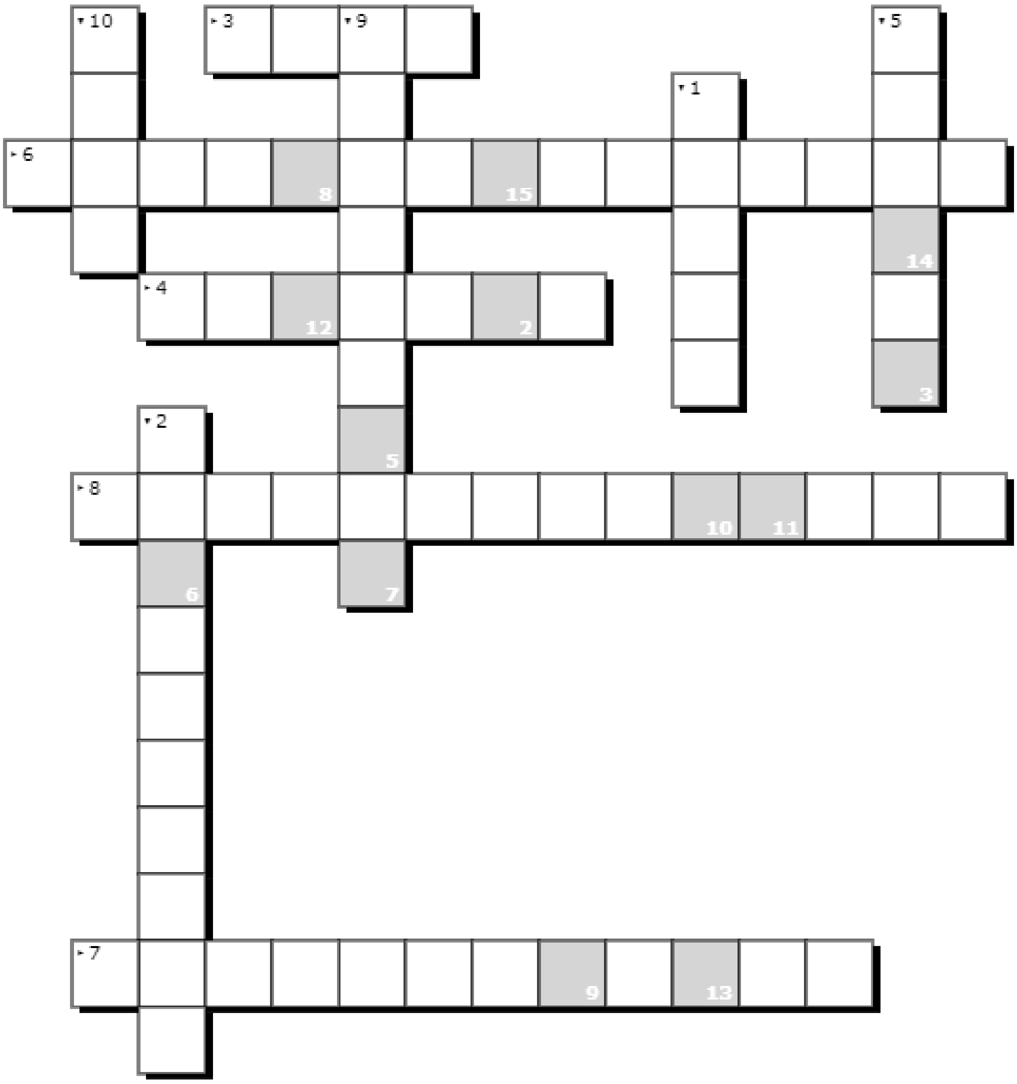
Bei einer Wiederholung hatten 8 von 20 Schülern die Noten 2 und 1. Berechnen Sie, wie hoch ist der Prozentsatz ist.	Egon gibt 110 €, also 20 % seines Lehrlingslohnes für Computerspiele aus. Berechnen Sie, wie hoch Egons monatlicher Lohn ist.	In der 7B kommen 40 % mit dem Schulbus. Das sind 12 Schüler/innen. Berechnen Sie, wie viele Schüler/innen insgesamt in der 7b sind.	Von den Schüler/innen der Klasse 5B sind 40% in den Sommerferien ans Meer gefahren, das sind insgesamt 14 Schüler/innen. Berechnen Sie, wie viele Schüler die Klasse hat.
Heizöl kostete 2016: 950€. 2017 wurde es um 2% teurer. Berechnen Sie, wie viel die Verbraucher 2017 zahlen müssen.	Von 50 Schülern gaben 35 als Lieblingsfach Mathe an. Berechnen Sie, wie viel Prozent das sind.	Bei einer Tombola sollen 30 % aller Lose Gewinne sein. Es gibt 150 Preise. Berechnen Sie, wie viele Lose es gibt.	Von den 28 Schüler/innen der Klasse 6C haben dreiviertel ein Haustier. Berechnen Sie, wie viele Schüler/innen das sind.
Von 40 ha Weide werden 3,2 ha verkauft. Berechnen Sie den Prozentsatz der verkauften Fläche.	18 von 24 Burschen der Klasse haben einen Führerschein. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Burschen in der Klasse einen Führerschein haben.	Ein 2000 € teurer Schrank wird 25 % billiger verkauft. Berechnen Sie die Höhe des Nachlasses in €?	Der Pizza-Lieferservice wirbt mit einem 20 % Rabatt bei der nächsten Bestellung. Luisa möchte sich eine 15 € Pizza bestellen. Berechnen Sie, wie viel Lisa zahlen muss.
In der 2A sind insgesamt 25 Schüler/innen. 28 % davon sind Mädchen. Berechnen Sie, wie viele Burschen sich in der Klasse befinden.	Von insgesamt 176 Mädchennamen enden 132 mit dem Buchstaben „A“. Berechnen Sie wie hoch der Prozentsatz ist.	Der Kaufmann Hans Clever senkt den Preis des neusten Computers um 10 %. Der vorherige Preis betrug 450 €. Berechnen Sie, wie viel kostet der Computer jetzt kostet.	75 Kinder sahen sich einen Film an und nur 20 % waren davon begeistert. Berechnen Sie, wie viele Kinder von diesem Film begeistert waren.

Lösungen

Grundwert: 20 Prozentwert: 8 Prozentsatz: $8 = 20 \cdot \frac{p}{100}$ $p = \frac{(8 \cdot 100)}{20}$ $p = 40\,\%$	Prozentwert: 110 € Prozentsatz: 20 % Grundwert: $110\,€ = G \cdot \frac{20}{100}$ $\frac{(110 \cdot 100)}{20} = G$ $G = 550\,€$	Prozentwert: 12S Prozentsatz: 40 % Grundwert: $12 = G \cdot \frac{40}{100}$ $\frac{(12\,x \cdot 100)}{40} = G$ $G = 30\,S$	Prozentwert: 14S Prozentsatz: 40 % Grundwert: $14 = G \cdot \frac{40}{100}$ $\frac{(14 \cdot 100)}{40} = G$ $G = 35\,S$
Grundwert: 950 € Prozentsatz: 102 % Prozentwert: $W = 950 \cdot \frac{102}{100}$ $W = 969\,€$	Grundwert: 50 S Prozentwert: 35 S Prozentsatz: $35 = 50 \cdot \frac{p}{100}$ $p = \frac{(35 \cdot 100)}{50}$ $p = 70\,\%$	Prozentwert: 150 L Prozentsatz: 30 % Grundwert: $150 = G \cdot \frac{30}{100}$ $G = \frac{(150 \cdot 100)}{30}$ $G = 500\,L$	Grundwert: 28 S Prozentsatz: 75 % Prozentwert: $W = 28 \cdot \frac{75}{100}$ $W = 21\,S$
Grundwert: 40 ha Prozentwert: 3,2ha Prozentsatz: $3{,}2 = 40 \cdot \frac{p}{100}$ $p = \frac{(3{,}2 \cdot 100)}{40}$ $p = 8\,\%$	Grundwert: 24 J Prozentwert: 18 J Prozentsatz: $18 = 24 \cdot \frac{p}{100}$ $p = \frac{(18 \cdot 100)}{24}$ $p = 75\,\%$	Grundwert: 2000 € Prozentsatz: 75 % Prozentwert: $W = 2000 \cdot \frac{75}{100}$ $W = 1500\,€$	Grundwert: 15 € Prozentsatz: 80 % Prozentwert: $W = 15 \cdot \frac{80}{100}$ $W = 12\,€$
Grundwert: 25S Prozentsatz: 72% Prozentwert: $W = 25 \cdot \frac{72}{100}$ $W = 18\,B$	Grundwert: 176M Prozentwert: 132M Prozentsatz: $132 = 176 \cdot \frac{p}{100}$ $\frac{(132 \cdot 100)}{176} = p$ $p = 75\,\%$	Grundwert: 450€ Prozentsatz: 90% Prozentwert: $W = 450 \cdot \frac{90}{100}$ $W = 405\,€$	Grundwert: 75K Prozentsatz: 80% Prozentwert: $W = 75 \cdot \frac{80}{100}$ $W = 60\,K$

1.1.4 Rechnen mit Prozent – Kreuzworträtsel

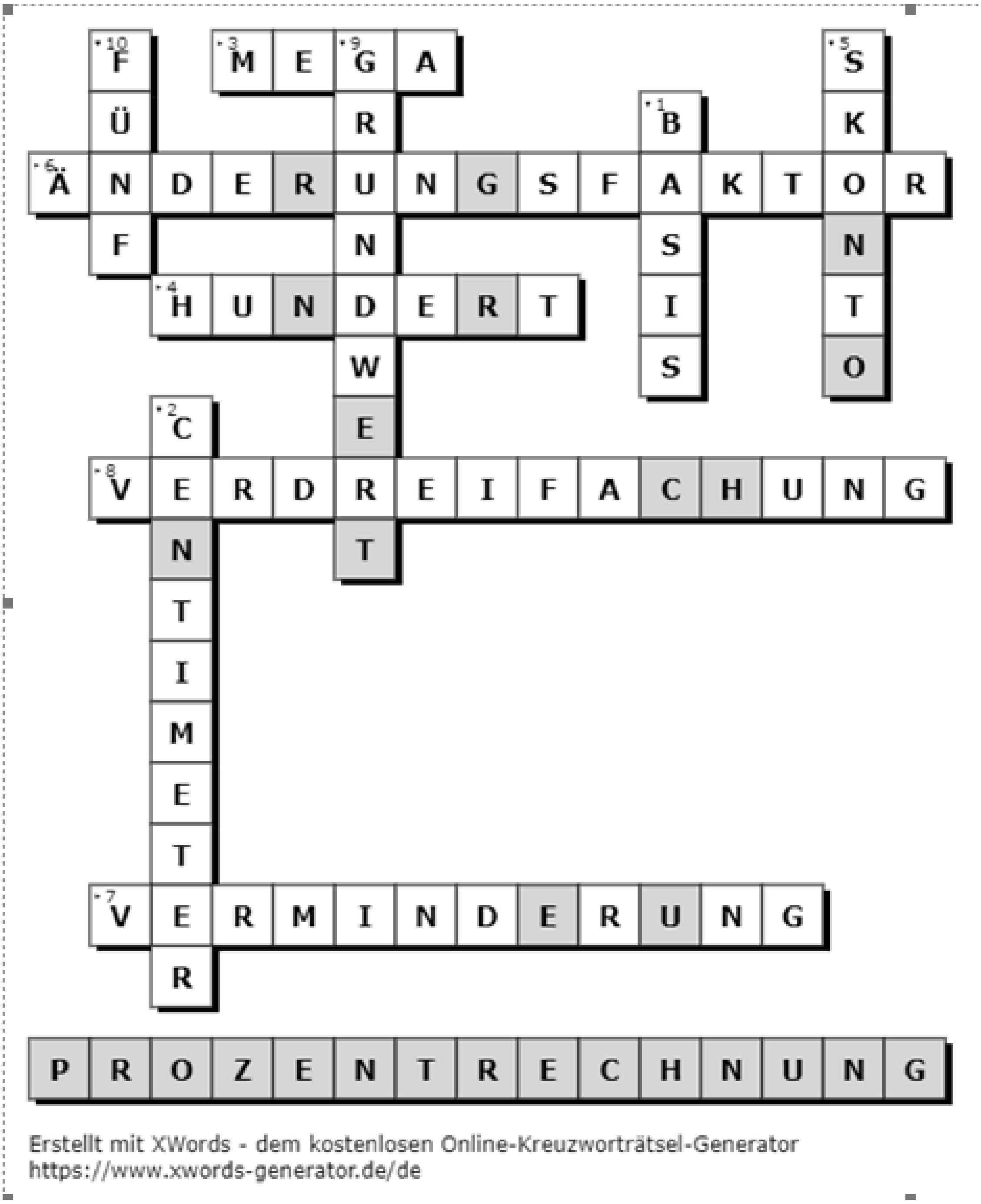
Hinweis: Ä, Ö, Ü als Ä, Ö, Ü eintragen



P	2	3	Z	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1. Eine Potenz besteht aus einer Hochzahl und der zugehörigen __
2. Bei der Umwandlung von Metern in __ muss die Zahl mit 100 multipliziert werden.
3. Gib die Vorsilbe zu folgender Potenz an: 10^6
4. Das Prozentzeichen (%) steht für eine Division durch __
5. Preisnachlass auf einen Rechnungsbetrag bei Barzahlung: __
6. Ein Preis wird um 15 % erhöht. Der zugehörige __ lautet 1,15.
7. Eine __ um 32 % entspricht dem Änderungsfaktor 0,67.
8. Eine Erhöhung um 200 % entspricht einer __ des Preises.
9. Der __ steht für 100 %.
10. Eine Erhöhung um 400 % entspricht einer Multiplikation mit der Zahl __.

Lösungen


PROZENTRECHNUNG
Erstellt mit XWords - dem kostenlosen Online-Kreuzworträtsel-Generator
https://www.xwords-generator.de/de

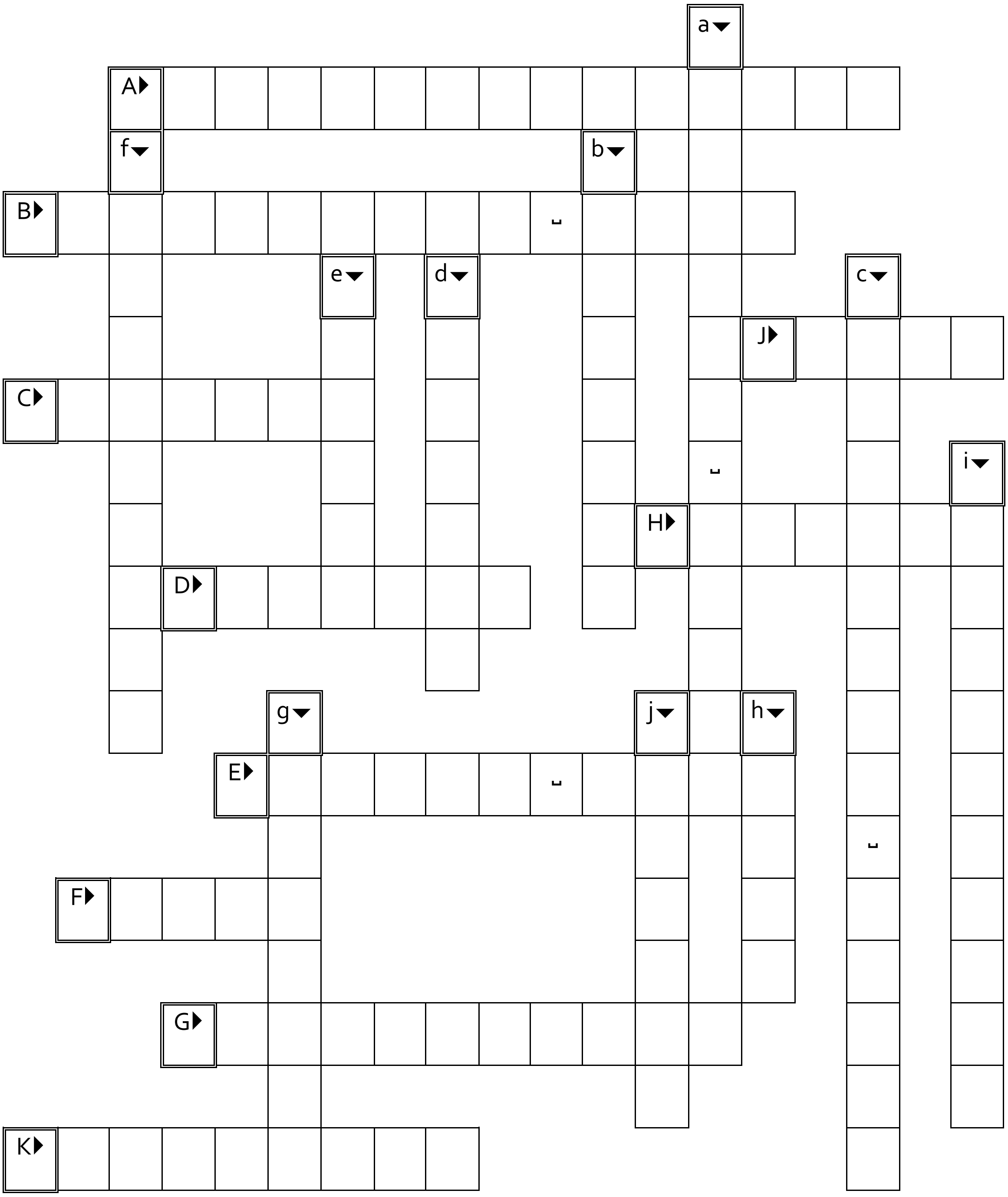
1.2 Gleit– und Festkommadarstellung

Ergänzen Sie die fehlenden Schreibweisen. Klappen Sie die Spalte Lösungen um.

Vorsilbe und Einheit	Normalisiertes Gleitkommaformat und Einheit	Festkommaformat und Einheit	Lösungen
0,375 $Megahertz$	3,75 . 105 $Hertz$		375 000 $Hertz$
90 mg	$9 \,.\, 10^{-2}\ g$		0,09 g
12 $Mikrosekunden$	$1{,}2 \,.\, 10^{-5}\ s$		0,000012 s
90,6 kg		90 600 g	$9{,}06 \,.\, 10^{4}\ g$
9,73 µm		0,00000973 m	$9{,}73 \,.\, 10^{-6}\ m$
17,5 $Gigahertz$		17 500 000 000 $Hertz$	$1{,}75 \cdot 10^{10}\ Hertz$
	$1{,}5 \,.\, 10^{12}\ Byte$	1 500 000 000 000 $Byte$	1,5 $Terabyte$
	$5{,}6 \,.\, 10^{-8}\ m$	0,000000056 m	56 $Nanometer$
	$5{,}6 \,.\, 10^{-12}\ m$	0,0000000000056 m	5,6 $Picometer$
0,45 $Megabyte$		450 000 $Byte$	$4{,}5 \,.\, 10^{5}\ Byte$
87 $Kilobyte$		87 000 $Byte$	$8{,}7 \,.\, 10^{4}\ Byte$
25 $Mikrogramm$	$2{,}5 \,.\, 10^{-5}\ g$		0,000025 g
	$1{,}07 \,.\, 10^{-3} g$	0,00107 g	1,07 $Milligramm$

1.3 Rechnen in den Zahlenmengen

1.3.1 Kreuzworträtsel



	WAAGRECHT		SENKRECHT
A	Erweitern: Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl __	a	Bruch, den man nicht in eine gemischte Zahl umwandeln kann: __
B	Eine ganze Zahl und ein echter Bruch sind eine __	b	50 € von 500 € sind ein __
C	Zahl unter dem Bruchstrich: __	c	Das kann man in eine gemischte Zahl umwandeln.
D	Zahl über dem Bruchstrich: __	d	Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren: __
E	Das Gegenteil von einem Bruch ist eine __	e	Das Gegenteil zu einer ganzen Zahl.
F	Der __ eines Bruches ändert sich nicht beim Erweitern oder Kürzen	f	Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren.
G	Diese Rechenoperation musst du beim Kürzen anwenden: __	g	Welche Rechenoperation bedeutet der Bruchstrich?
H	$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8},$ sind __	h	Bruchstrich auf Englisch
J	Diese Zahl steht niemals im Nenner, weil man durch diese Zahl nicht teilen darf.	i	Wenn du das nicht kannst, hast du keine Chance beim Bruchrechnen auf eine akzeptable Note zu kommen.
K	Bruch auf Englisch	j	Die Hälfte von ¼ ist Ein __

Ä, Ö, Ü sind ein Buchstabe, ␣ ist ein Leerschritt zwischen zwei Wörtern.

Lösung

													a▼					
		A▶	M	U	L	T	I	P	L	I	Z	I	E	R	E	N		
		f▼									b▼		C					
B▶	G	E	M	I	S	C	H	T	E	*	Z	A	H	L				
		R				e▼		d▼			E		T			c▼		
		W				B		K			H		E	J▶	N	U	L	L
C▶	N	E	N	N	E	R		Ü			N		R			N		
		I				U		R			T		*			E		i▼
		T				C		Z			E	H▶	B	R	Ü	C	H	E
		E	D▶	Z	Ä	H	L	E	R		L		R			H		I
		R						N					U			T		N
		N			g▼							j▼	C	h▼		E		M
				E▶	G	A	N	Z	E	*	Z	A	H	L		R		A
					E							C		I		*		L
	F▶	W	E	R	T							H		N		B		E
					E							T		E		R		I
			G▶	D	I	V	I	D	I	E	R	E	N			U		N
					L							L				C		S
K▶	F	R	A	C	T	I	O	N								H		

2 Algebra und Geometrie

2.1 Binomische Formeln – Gruppenpuzzle

1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Übungsbeispiele:

1. $(a + 5)^2 =$
2. $(a^2 s + 2s)^2 =$
3. $(8 + z)^2 =$
4. $(6xyz + 7xz)^2 =$
5. $(20 + xy)^2 =$
6. $(3x + 2y) \cdot (3x + 2y) =$

2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Übungsbeispiele:

1. $(f - 7)^2 =$
2. $(6x - 3y) \cdot (6x - 3y) =$
3. $(12 - z)^2 =$
4. $(100xyz - 7xz)^2 =$
5. $(-4x^2 + xy)^2 =$
6. $(10as - 8s)^2 =$

3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Übungsbeispiele:

1. $(3 + z) \cdot (3 - z) =$
2. $(r + 2s) \cdot (r - 2s) =$
3. $(7 - 2b) \cdot (7 + 2b) =$
4. $(3x + 4y) \cdot (3x - 4y) =$
5. $(4s + 5t) \cdot (4s - 5t) =$
6. $(\frac{1}{2} + x) \cdot (\frac{1}{2} - x) =$

Faktorisiere (=Umkehrung):

1. $9x^2 + 24x + 16 =$
2. $u^2 + 10uv + 25v^2 =$
3. $49s^2 - 28st + 4t^2 =$

Ergänze:

4. $(4z + \ldots..)^2 = 16z^2 + \ldots\ldots. + 64$
5. $(\ldots..- 4)^2 = 36y^2 - 48y + \ldots\ldots..$
6. $(\ldots. + \ldots.)^2 = 25a^2 + 70ab + \ldots..$
7. $(\ldots. - \ldots.)^2 = x^2 - \ldots\ldots + 81y$

Ergänze aufgrund der Formel $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

8. $(2a + \ldots..) \cdot (\ldots\ldots - 5b) = 4a^2 - \ldots\ldots$
9. $(4v^3 + \ldots\ldots) \cdot (\ldots\ldots\ldots.) = \ldots\ldots - 36x^2$
10. $(6x - 10y) \cdot (\ldots.) = 36x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$
11. $(a - \ldots..) \cdot (\ldots.. + 7h) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

2.2 Lineare Gleichungen – SUDOKU

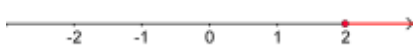
Lösen Sie die linearen Gleichungen auf einem Extrablatt. Setze anschließend die Lösungen in die entsprechenden Kästchen ein. Finde die restlichen Zahlen durch Lösen des Sudokus.

AJ:	$-9 = x - 14$
AM:	$-2x - 13 = -3x - 5$
AO:	$4x - 2x = 18$
AQ:	$3m + 4{,}5m = 15$
AR:	$2(8 + p) = 22$
BJ:	$-4(x + 6) = -40$
BK:	$12s - (4 + 4s) = 60$
BO:	$7m - 3m - 6 = 6$
CL:	$\frac{2}{3} + \frac{3k}{4} = \frac{71}{12}$
CP:	$8y - (2y - 3) = 9$
CR:	$64 = 10x - 2x$
DJ:	$4n - 7 = 5 - 2n$
DK:	$5y - 3 = 2y + 12$
DN:	$\frac{4}{6} = \frac{m}{9}$
DP:	$7z - 1 = 6z + 3$
DR:	$6(y + 3) = 24$
EL:	$32 = 8x$

EM:	$-2q - 5 = -11$
EO:	$5w + 2 = 2w + 5$
FJ:	$3x - 7 = 20$
FN:	$\frac{c}{5} - 4 = -3$
FQ:	$3x - 2 = 16$
FR:	$9 = -4y + 6y - 5$
GL:	$-6a + 2a = -36$
GQ:	$2(14 - 2f) = 0$
GP:	$6 - 3(2k - 4) = -18$
HK:	$\frac{d}{2} - 5 = -4$
HM:	$-0{,}04x + 1{,}32 = 1{,}08$
HR:	$4x - 3 = x + 9$
IJ:	$4\left(\frac{1}{4} + x\right) = 5$
IK:	$6x = 24$
IM:	$3a + 4 = a + 18$
IO:	$0{,}5t - 3t + 5 = 0$
IR:	$-(z + 5) = -14$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
J									
K									
L									
M									
N									
O									
P									
Q									
R									

2.3 Ungleichungsdomino

Start	$2x \leq 4$
	**Ende**
	$x + 3 \geq 1$
	$2x + 1 \leq x$
	$-2(x - 2) \leq 0$
	$1 - (x - 1) \geq 1$
	$3 \leq 3x$
	$2 - x \leq 3$

Ungleichungsdomino - Lösung

Start	$2x \leq 4$
	$x + 3 \geq 1$
	$2 - x \leq 3$
	$3 \leq 3x$
	$2x + 1 \leq x$
	$1 - (x - 1) \geq 1$
	$-2(x - 2) \leq 0$
	Ende

2.4 Terme – Sprache der Mathematik

Klappen Sie zuerst die Lösungen nach hinten (oder decken Sie sie ab), schreiben Sie dann den Term an, der die Angabe beschreibt. Verwenden Sie für die unbekannte Zahl die Variable x .
Vergleichen Sie danach mit der Lösung.
GUTES GELINGEN!

	Text	als Term	Lösung
1	... die Differenz einer unbekannten Zahl und 4 ...		$x-4$
2	... die Differenz von dem Doppelten einer Zahl und 4 ...		$2x-4$
3	... das Doppelte der Differenz einer Zahl und 4 ...		$2\cdot(x-4)$
4	... die Differenz von 4 und der Hälfte einer Zahl ...		$4-\frac{x}{2}$
5	... die Hälfte der Differenz von 4 und einer Zahl ...		$\frac{4-x}{2}$, $(4-x):2$,
6	... das Produkt von 5 und einer unbekannten Zahl ...		$5\cdot x$ *oder* $5x$
7	... das Produkt von 5 und einer unbekannten Zahl, vermehrt um 7 ...		$5\cdot x+7$
8	... der Quotient von 5 und einer unbekannten Zahl vermindert um 7 ...		$\frac{5}{x}-7$ *oder* $5:x-7$
9	... der Quotient von 5 und einer um 7 verminderten unbekannten Zahl ...		$\frac{5}{x-7}$ *oder* $5:(x-7)$
10	... die Summe von 4 und dem Dreifachen einer Zahl ...		$4+3x$
11	... das Produkt von dem Drittel einer Zahl und dem Vierfachen der Zahl ...		$\frac{x}{3}\cdot 4x$ *oder* $\frac{x}{3}\cdot(4\cdot x)$
12	... das Produkt der Summe einer Zahl und 6 und der Differenz von der Zahl und 2 ...		$(x+6)\cdot(x-2)$
13	... der Quotient von dem Dreifachen einer Zahl und der Differenz von 5 und der Zahl ...		$\frac{3x}{5-x}$

3 Funktionale Zusammenhänge

3.1 Modellieren linearer Funktionen

Klappen Sie zuerst die Lösungen nach hinten (oder decken Sie sie ab).
Zeichen Sie dann jeweils den Sachverhalt, den die Texte beschreiben, passend als Weg-Zeit-Diagramm in das nebenstehende Koordinatensystem ein. Vergleichen Sie anschließend mit der Lösung!

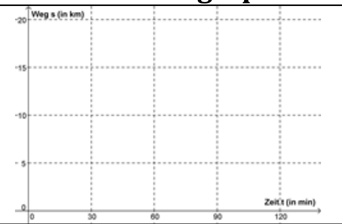
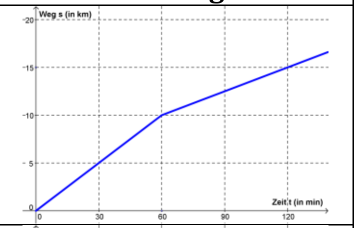
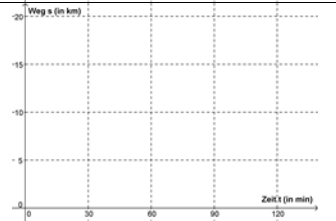
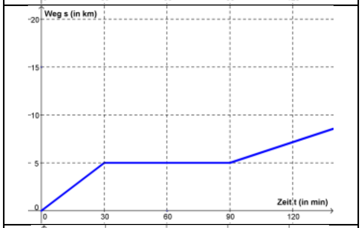
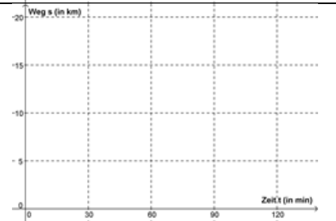
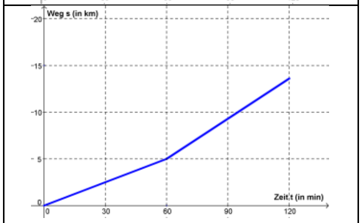
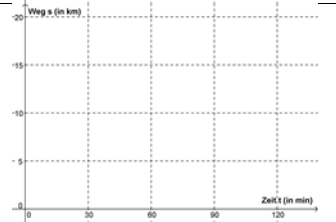
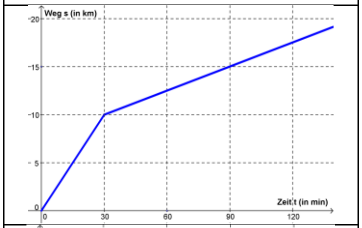
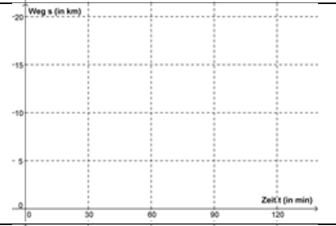
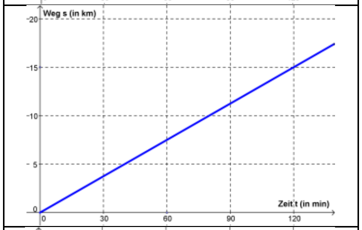
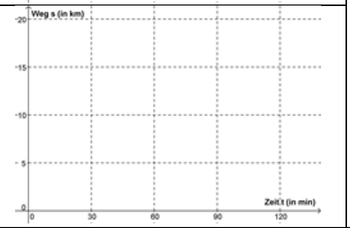
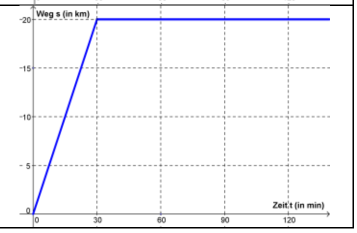
Musterbeispiel :

Text :
Anna fährt mit ihrem Fahrrad gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h.

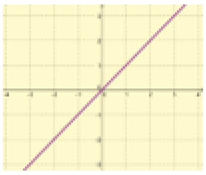
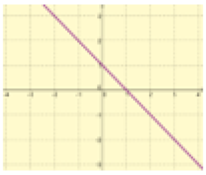
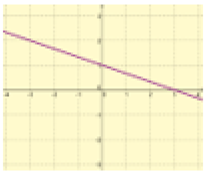
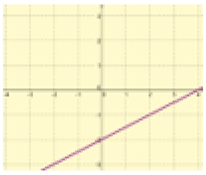
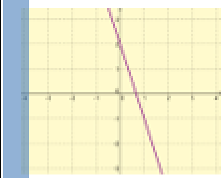
Funktionsgraph :

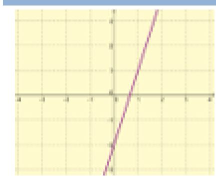
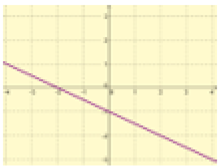
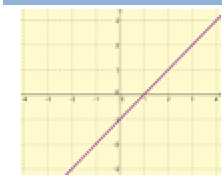
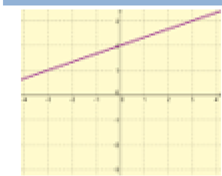
ERKLÄRUNG:
In 60 Minuten hat Anna 15 km zurückgelegt; sie hat also eine Geschwindigkeit v = $\frac{15km}{60min} = 15\,\frac{km}{h}$.
Weil sie gleichmäßig schnell fährt, ist der Graph gerade.

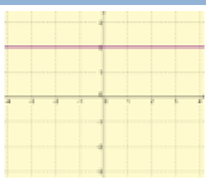
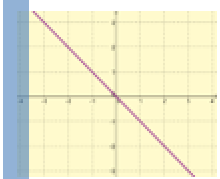
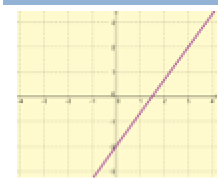
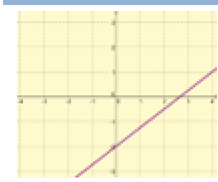
GUTES GELINGEN!

Text	Funktionsgraph		Lösung
Bruno läuft die erste Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h und ab dann nur noch mit 5 m/h.		Lösungen bitte umklappen! Lösungen bitte umklappen! Lösungen bitte umklappen! Lösungen bitte umklappen!	
Carina fährt mit ihren Inline-Skates eine halbe Stunde lang mit 10 km/h, macht dann eine einstündige Pause und fährt dann mit 5 km/h weiter!			
Davids Lieblingssport ist Nordic-Walking. Nach einer Stunde hat er schon 5 km zurückgelegt. Danach verschärft er sein Tempo und geht in der nächsten Stunde mit 8 km/h weiter.			
Elisabeth fährt mit ihrem Mountainbike zuerst eine halbe Stunde lang mit 20 km/h. Dann wird ein Reifen kaputt und sie muss es schieben. Dabei hat sie eine Geschwindigkeit von 5 km/h.			
Franz läuft Halbmarathon. Er hält dabei eine gleichmäßige Geschwindigkeit von 7,5 km/h.			
Gudrun fährt mit dem Bus eine halbe Stunde lang bis zum 20 km entfernten Bahnhof. Dort muss sie aber fast 2 Stunden lang auf den Zug warten.			

3.2 Lineare Funktionen – Domino

				
$y = 3x - 2$	$y = \frac{1}{2}x - 2$	$y = -\frac{1}{2}x - 1$	$y = x - 1$	$y = \frac{4}{3}x - 2$

				
$y = -\frac{1}{3}x + 1$	$y = -x$	$y = \frac{3}{4}x - 2$	$y = x$	$y = 2$

				
$y = -3x + 2$	$y = -x + 1$	$y = \frac{1}{3}x + 2$	$y = -4x - 2$	

Lösung

	1	1	2	2	3	3	4	4	
	14							5	
	14	13	13					5	
			12					6	
			12					6	
			11	11	10	10		7	
						9		7	
						9	8	8	

4 Finanzmathematik

4.1 Lernkarten

1 Zinseszinsformel für eine beliebige Zinsperiode	2 Berechnung und Bedeutung des Aufzinsungsfaktors
3 Was versteht man unter aufzinsen/abzinsen?	4 Was versteht man unter einer Zinsperiode? Welche Zinsperioden kennen Sie? Wie lauten die Abkürzungen dafür?
5 Zusammenhang zwischen dem Zinssatz vor und dem Zinssatz nach KESt.	6 Zusammenhang zwischen dem unterjährigen Zinssatz und dem äquivalenten jährlichen Zinssatz.
7 Zusammenhang zwischen dem unterjährigen Aufzinsungsfaktor und dem äquivalenten jährlichen Aufzinsungsfaktor.	8 nomineller Jahreszinssatz
9 Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik.	10 Vor- und nachschüssige Renten. Was versteht man darunter? Zeitlinie?

2

$$q = 1 + i$$
$$q_{KESt} = 1 + i_{KESt}$$
$$q_m = 1 + i_m$$

Der Faktor mit dem das Kapital multipliziert wird, wenn eine Zinsperiode vergeht.

1

$$K_n = K_0 \cdot q_m^n$$
$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^n$$

K_n … Endwert
K_0 … Barwert
n … Laufzeit in Zinsperioden
q_m … Aufzinsungsfaktor für eine Zinsperiode
i_m … Zinssatz für eine Zinsperiode

4

Zinsperiode … zeitlicher Abstand in dem die Zinsen berechnet werden.

Monat, Quartal, Semester, Jahr

p.m., p.q., p.s., p.a.

3

aufzinsen … multiplizieren mit dem Aufzinsungsfaktor

abzinsen … dividieren durch den Aufzinsungsfaktor

6

$$i = (1 + i_m)^m - 1$$

$$i_m = \sqrt[m]{1 + i} - 1$$

5

$$i_{\text{KESt}} = 0{,}75 \cdot i$$

bzw.

$$i = \frac{i_{\text{KESt}}}{0{,}75}$$

8

$$i_{\text{nom}} = m \cdot i_m \quad \text{bzw.} \quad i_m = \frac{i_{\text{nom}}}{m}$$

z.B.: $i_{12} = \dfrac{i_{\text{nom}}}{12}$

Der Monatszinssatz ist ein Zwölftel des nominellen Zinssatzes.

7

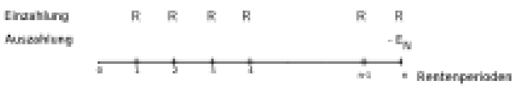
$$q = q_m^m \quad \text{bzw.} \quad q_m = \sqrt[m]{q}$$

z.B.: $q = q_4^4$ bzw. $q_4 = \sqrt[4]{q}$

Der Aufzinsungsfaktor für ein Quartal ist die vierte Wurzel aus dem Aufzinsungsfaktor für ein Jahr.

10

vorschüssige Rente
… die Rate wird zu Beginn jeder Rentenperiode bezahlt.



nachschüssige Rente
… die Rate wird am Ende jeder Rentenperiode bezahlt.

9

1. Zwei oder mehrere zu verschiedenen Zeitpunkten fällige Zahlungen dürfen nur dann addiert, subtrahiert oder verglichen werden, wenn sie auf den gleichen Zeitpunkt auf- oder abgezinst wurden.
2. Besteht „Leistung = Gegenleistung" bezüglich eines Zeitpunktes, so besteht diese Gleichheit auch bezüglich eines beliebigen anderen Zeitpunktes.

5 Statistik

5.1 Expertenpuzzle

Voraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler haben Kenntnisse über

- Begriffsdefinition für
  - Merkmal
  - Merkmalsträger
  - Merkmalsausprägung
  - Wertevorrat
- Arten von Merkmalen:
  - Qualitativ ungeordnet
  - Qualitativ geordnet
  - Quantitativ zählbar: diskret
  - Quantitativ messbar: stetig
- Verschiedene Skalen und ihre Zuordnung zu Arten von Merkmalen:
  - Nominalskala
  - Ordinalskala
  - Intervallskala
  - Proportionskala

Expertenblatt 1

Um eine große Datenmenge übersichtlich darzustellen, verwendet man unter anderem Tabellen und Listen.

Klärt in eurem Expertenteam folgende Begriffe:

- Urliste
- Absolute Häufigkeit
- Relative Häufigkeit
- Prozentuelle Häufigkeit
- Akkumulierte Häufigkeit

Was versteht man in der Statistik unter einer Klassenbildung (Gruppierung)

- Welche Punkte müssen dabei beachtet werden
- Welche Fehler/Ungenauigkeiten können bei ungeschickter Klassenbildung auftreten?

Expertenblatt 2

Um eine große Datenmenge übersichtlich darzustellen, verwendet man unter anderem Grafiken
Klärt in eurem Expertenteam folgende Begriffe:

- Säulen- und Balkendiagramme
- Tortendiagramme
- Piktogramme
- Liniendiagramme

Ordnet den jeweiligen Diagrammen Skalen zu (Nominal-, Ordinal-, Intervall-, Proportionalskala)
Welche „Fehler“ können in der Gestaltung von Diagrammen auftreten?

Expertenblatt 3

Um eine große Datenmenge übersichtlich darzustellen, verwendet man unter anderem Kennzahlen für die Mitte der Datenmenge

Klärt in eurem Expertenteam folgende Begriffe:

- Arithmetisches Mittel
- Geometrisches Mittel
- Modus
- Median

Ordnet den jeweiligen Kennzahlen sinnvoll Skalen zu (Nominal-, Ordinal-, Intervall-, Proportionalskala)
Welche „Probleme“ können bei der Berechnung der Kennzahlen auftreten?

Expertenblatt 4

Um eine große Datenmenge übersichtlich darzustellen, verwendet man unter anderem ein Boxplot
Klärt in eurem Expertenteam folgende Begriffe:

- Box
- Whisker
- Quartil
- Spannweite
- Minimum und Maximum

Führt ein konkretes Beispiel aus

In eurer Gruppe gab es folgende Punktezahlen bei einem Test (von maximal 100)

98 97 94 94 89 88 88 86 73 72 72 72 69 68 67 65 65 64 63 61 62 59 58 24

Stammgruppe:

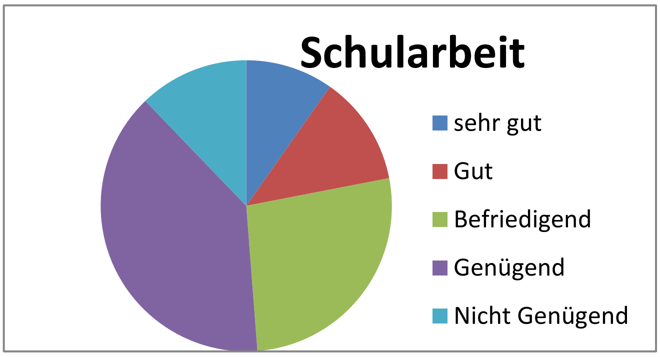
Ich kann für eine Datenmenge ein Boxplot erstellen: ich kann die Begriffe Minimum, Maximum, Spannweite, Quartil, Median und Ausreißer erklären.
Ich kann die Begriffe Säulen- und Balkendiagramm, Tortendiagramm, Piktogramm und Liniendiagramm erklären und für eine Skala ein geeignetes Diagramm empfehlen.
Ich weiß, welche Fehler beim Erstellen von Diagrammen häufig passieren und kann sie vermeiden.
Ich kann die Begriffe absolute, relative, prozentuelle und akkumulierte Häufigkeit erklären und aus absoluten Häufigkeiten alle anderen Werte berechnen.
Ich kann einen Wertevorrat mit vielen Ausprägungen gruppieren und weiß, welche Fehler ich dabei vermeiden muss.

Lernzielkontrolle

- Erstelle aus folgenden Daten (bei einem Test waren höchstens 60 Punkte erreichbar) einen Boxplot und beschrifte Minimum, Maximum, Q1, Median und Q3.

$$21, 34, 35, 35, 36, 36, 41, 42, 43, 43, 43, 44, 44, 45, 45, 46, 49, 50, 55$$

- Im Diagramm ist das Ergebnis einer Schularbeit dargestellt



Nenne mindestens zwei Kritikpunkte

Gib eine begründete Empfehlung für eine andere Art von Diagramm für diese Datenmenge an

- Ergänze in der Tabelle fehlende Zahlen:
- Bestimme für die Schularbeit aus der Tabelle arithmetisches Mittel, Modus und Median

Note	Absolute H.	Relative H.	Akkumulierte H. in %
1	3		
2	8		
3	10		
4	3		
5	1		

- In den letzten vier Jahren hat sich die Zahl von Schüler/innen in Schuldorf folgendermaßen verändert – bezogen auf die Zahlen des Vorjahres.

2016/2017	2017/2018	2018/2019	2019/2020
$+11\ \%$	$-14\ \%$	$+20\%$	-17%

Der Bürgermeister erklärt: wir haben also gleich viele Schüler/innen wie 2016/2017, denn $11\ \% - 14\ \% + 20\ \% - 17\ \% = 0\ \%$.

Also werden wir 2019/20 im Budget die gleiche Summe wie 2016/17 für die Schule verwenden! Widerlege diese Aussage durch zwei Argumente (eines davon mathematisch!)

5.2 Workshop – beschreibende Statistik

Die beschreibende Statistik erfasst, beschreibt und analysiert Daten. Es geht darum, Datenmengen aller Art übersichtlich darzustellen und Eigenschaften dieser Daten anzugeben. Die Darstellung der Daten erfolgt durch Tabellen, Grafiken und Kenngrößen.

Grundbegriffe

- Die **Grundgesamtheit** ist die Menge der zu beurteilenden Objekte.
- Eine **Stichprobe** ist eine Menge von Objekten, die der Grundgesamtheit **zufällig** entnommen werden.
- Der **Stichprobenumfang** ist die **Anzahl n** der Elemente der Stichprobe.
- Ein **Merkmal** ist eine Eigenschaft der zu untersuchenden Objekte.
- **Merkmalsträger** sind die zu untersuchenden Objekte.
- **Merkmalsausprägung** ist ein Wert, den ein Merkmalsträger annehmen kann.
- Man unterscheidet:

Name	Erklärung	Beispiele
Metrische (quantitative) Merkmale	Können gemessen und geordnet (Rangplätze) werden, die Werte können addiert und subtrahiert werden	Körpergröße, Temperatur, Jahreseinkommen…
Ordinale Merkmale	Können geordnet werden, aber die Rangplätze können nicht addiert oder subtrahiert werden	Platzierung bei sportlichen Wettkämpfen, Güteklassen bei Lebensmitteln…
Nominale (qualitative) Merkmale	Haben keine natürliche Reihenfolge, können daher nicht geordnet werden	Augenfarbe, Religion, Geschlecht, Automarke…

- Beispiel: Ordne jeweils die richtige Merkmalsausprägung zu.

	metrisch	ordinal	nominal
Haarfarbe			
Nettoeinkommen			
Wohnort der Mitschüler			
Körpergewicht			
Rang in den Musikcharts			
Betragensnote			

Häufigkeitsverteilungen

- Bei statistischen Erhebungen werden die Daten in einer **Urliste** unsortiert gesammelt. Eine mögliche Auswertung der Daten geschieht über Häufigkeitsverteilungen. Man unterscheidet **absolute, relative und prozentuelle Häufigkeit.**

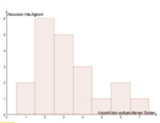
- Beispiel:
  In einem Internetcafe wird die Anzahl der aufgerufenen Seiten von 20 Kunden protokolliert und in folgender Urliste dargestellt:
  $2, 3, 5, 4, 6, 2, 2, 6, 2, 2, 2, 3, 1, 3, 3, 4, 3, 1, 7, 4$

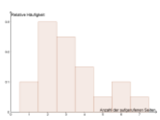
  1) Ermittle die absolute, relative und die prozentuelle Häufigkeit und trage die Werte in folgender Tabelle ein.

Merkmalsausprägung: Anzahl der aufgerufenen Seiten x_i	absolute Häufigkeit H_i	relative Häufigkeit $h_i = \frac{H_i}{n}$	prozentuelle Häufigkeit $h_i \cdot 100$ in %
1	2	0,1	10
2	6	0,3	30
3	5	0,25	25
4	3	0,15	15
5	1	0,05	5
6	2	0,1	10
7	1	0,05	5
Summe:	20	1	100

- Die Häufigkeiten können auch grafisch dargestellt werden, z.B. als Balken-, Säulen-, Kreisdiagramm, etc.

  Für das obige Beispiel würde ein Balkendiagramm wie folgt aussehen:





Mittelwerte (Lagemaße)

Tabellen oder grafische Darstellungen können Häufigkeitsverteilungen veranschaulichen, reichen aber für schnelle Vergleiche meist nicht aus. Dazu benötigt man Kennzahlen, die wesentliche Eigenschaften der Verteilung angeben. Der **Durchschnitt** oder **Mittelwert** erlaubt mithilfe einer einzigen Zahl eine rasche Charakterisierung einer Stichprobe.

- **Arithmetisches Mittel**
  Für eine Stichprobe oder Urliste mit den Merkmalwerten $x_1, x_2, \dots, x_n$ nennt man
  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ das arithmetische Mittel. (siehe auch Formelsammlung)

- **Median oder Zentralwert**
  Der Median ist aus der geordneten Liste zu ermitteln. Bei ungerader Anzahl n ist der Median der Wert in der Mitte, bei gerader Anzahl n wird das Arithmetische Mittel der beiden Werte in der Mitte gebildet.

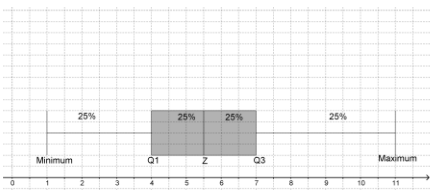
- **Quartile**
  Die Quartile unterteilen die durch den Median entstandenen Datenhälften nochmals.
  Das untere Quartil Q_1 ist der Median der unteren Datenhälfte. Es teilt bei 25 %.
  Das mittlere Quartil Q_2 ist der Median aller Daten: Es teilt bei 50 %.
  Das obere Quartil Q_3 ist der Median der oberen Datenhälfte. Es teilt bei 75 %.

- **Modus oder Modalwert**
  Der Modus ist der Wert mit der größten Häufigkeit.

- Beispiel: Ermittle alle Lagemaße des Internet-Café Beispiels.

Der Boxplot

Der Boxplot ist eine weitere grafische Darstellung. In einen Boxplot werden Minimum, unteres Quartil, Median, oberes Quartil und Maximum einer Datenreihe eingetragen.



- Zeichne einen Boxplot für das Internet-Café Beispiel in die obige Grafik.

Streuungsmaße

Mithilfe der Lagemaße können gewisse Informationen über die Größe der Werte eines Datensatzes angegeben werden. Diese Zahlen sagen aber nichts darüber aus, wie weit die Werte voneinander oder von einem Lagemaß entfernt liegen. Die Streuungsmaße beschreiben diese Abweichung. Die Berechnung dieser Maßzahlen ist im Allgemeinen nur für metrische Merkmale möglich.

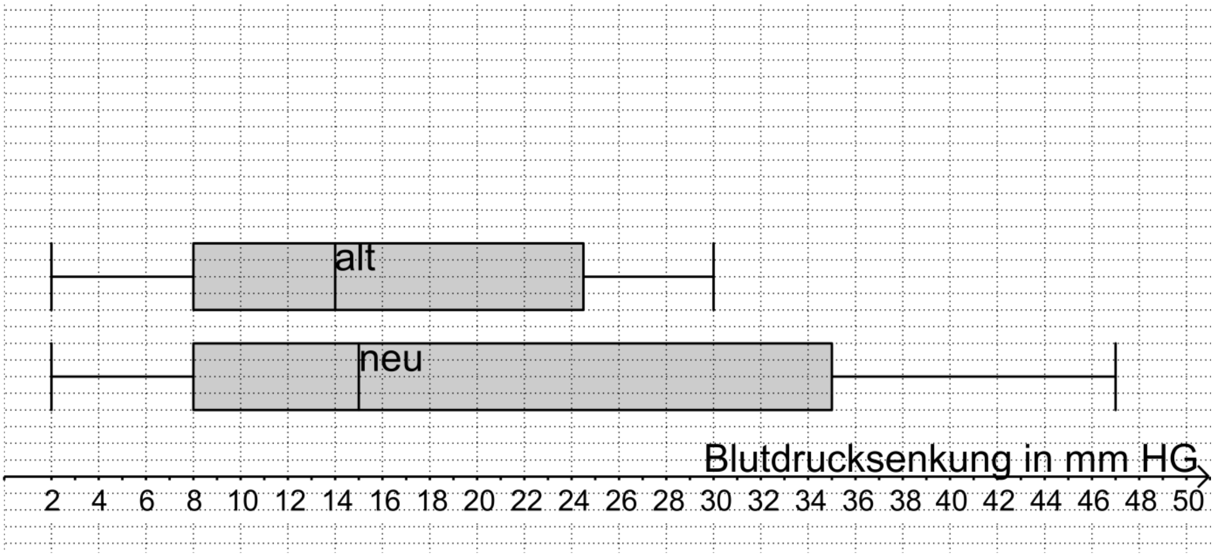
- Die **Spannweite (Range)** ist die Differenz zwischen das Maximum und das Minimum eines Datensatzes. Die Spannweite ist leicht zu ermitteln, unabhängig von Lagemaße, aber ist durch einzelne Ausreißer stark beeinflusst.

- Der **Interquartilsabstand** ist die Differenz zwischen den Quartilsgrenzen Q_3 und Q_1 und gibt an, in welchem Bereich sich die mittleren 50% aller Werte befinden. Der interquartilsabstand ist weniger anfällig für Ausreißer.

- Die wichtigste Kennzahl zur Beschreibung der Streuung von metrischen Merkmalen ist die **Varianz** bzw. die Wurzel aus der Varianz, die **Standardabweichung**. Hierbei wird zwischen Varianz einer Grundgesamtheit $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2$ und der Varianz einer Stichprobe $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2$ unterschieden. Die Standardabweichung gibt an, wie stark die Werte im Mittel in Bezug auf den Mittelwert streuen.

Beispiel:

An einer Gruppe von 25 Personen wurde ein neues Mittel zur Senkung des Blutdruckes getestet. 12 Personen bekamen ein schon länger am Markt befindliches Blutdruckmittel, die restlichen 13 ein neues Medikament. Der Blutdruck wurde jeweils zu Beginn und nach Beendigung des Tests gemessen und die Differenz (Blutdrucksenkung) notiert. Die Messergebnisse sind durch die beiden Boxplots dargestellt:



a) Lies aus der Grafik die 5 Kenndaten (Min, Q_1, Z, Q_3, Max) beider Boxplots ab.

b) Argumentiere, ob das neue Medikament eine bessere Wirkung auf den Blutdruck hat als das alte Medikament.

c) Erkläre, wie man den Median ohne Technologieeinsatz bei beiden Gruppen bestimmt und wo der Unterschied in der Ermittlung liegt.

d) Eine weitere Testgruppe von 12 Personen erreichte mit dem alten Medikament die folgenden Werte: $19;\ 10;\ 8;\ 7;\ 15;\ 25;\ 4;\ 11;\ 15;\ 31;\ 11;\ 16.$

   1) Stelle die Daten in einem Boxplot in die obige Grafik dar.
   2) Berechne das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.

5.3 Regression – Workshop

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen

Beispiel 1

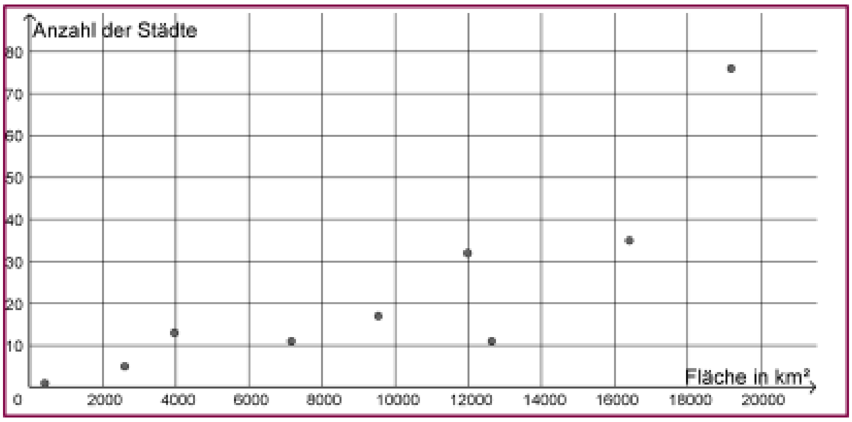
In der folgenden Tabelle sind für alle österreichischen Bundesländer die Fläche und die Anzahl an Städten gegeben:

	Bgld	Ktn	NÖ	OÖ	Sbg	Stmk	Tirol	Vlbg	Wien
Fläche (km²)	3 962	9 538	19 186	11 980	7 156	16 401	12 640	2 601	415
Städte	13	17	76	32	11	35	11	5	1

Erkennst du hier einen Zusammenhang?

Punktewolke und Trendlinie

- Einen ersten Eindruck ermöglicht eine grafische Darstellung in Form einer Punktewolke (Streudiagramm):



Man erkennt einen gewissen Zusammenhang zwischen der Größe eines Bundeslandes und die Anzahl seiner Städte.

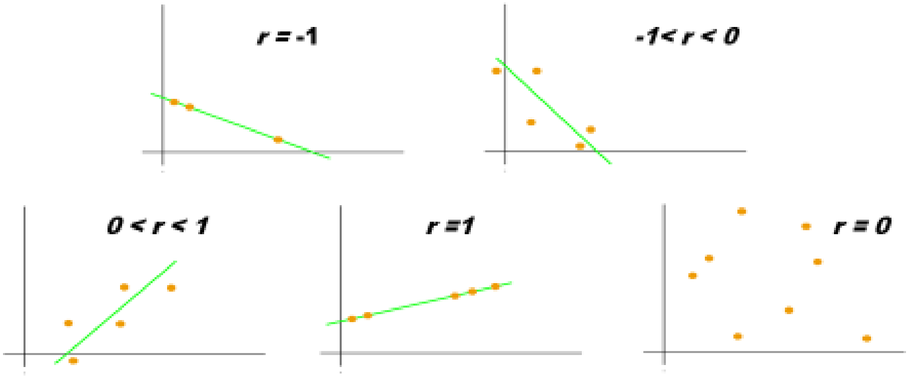
Um den Zusammenhang zwischen zwei Größen messbar zu machen verwendet man sogenannte Regressionsverfahren. Mit diesen Verfahren kann eine Funktion ermittelt werden, die den Trend der Punktewolke möglichst gut abbildet. Der Graph dieser Funktionen schmiegt sich bestmöglich an die Punktewolke an.

Die Funktion heißt Regressionsfunktion oder Ausgleichsfunktion.
Der Graph der Funktion heißt Regressionslinie oder Trendlinie.
Ist die Ausgleichsfunktion linear, dann heißt der Graph Regressionsgerade.

Das Verfahren um die bestmögliche Trendlinie zu finden heißt: Methode der kleinsten Quadrate. Man legt die Trendlinie so in die Punktewolke, dass die Summe der Quadrate der Abstände zwischen berechnete y-Werte und tatsächliche y-Werten minimal ist.

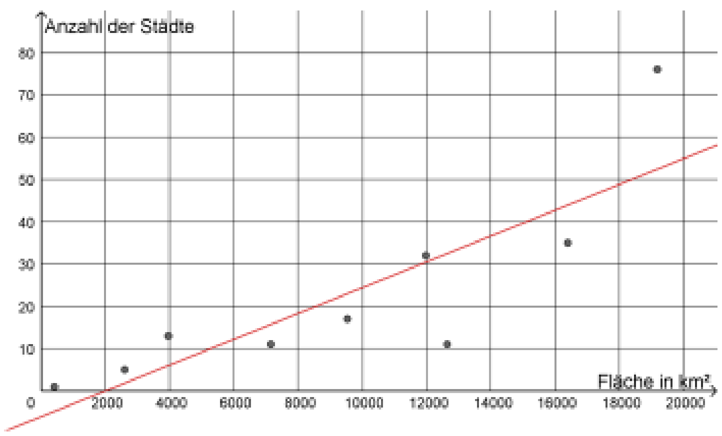
Korrelationskoeffizient nach Pearson

Der Korrelationskoeffizient r beschreibt, wie stark der lineare Zusammenhang zwischen zwei Größen ist. Es gilt $-1 \leq r \leq 1$.
Allerdings lassen sich aus Korrelation keine Schlüsse ziehen, ob eine der Größen die andere tatsächlich beeinflusst. (Bsp.: Auftreten von Störchen und Geburten)



Ergebnis

$y = 0{,}00305x - 6{,}10705 \qquad r = 0{,}84$



Bildungsdirektion Wien

Nicht lineare Regression

Zwischen zwei Größen existieren auch nicht lineare Zusammenhänge, wie:

- Quadratisch________________________________
- Kubisch________________________________
- 4.Grad________________________________
- Exponentiell________________________________
- Logistisch________________________________

Der Korrelationskoeffizient wird hier zwar angezeigt, hat aber keine Bedeutung.

Wichtig bei allen Regressionsarten: Definieren der unabhängigen und der abhängigen Variable.

5.3.1 Regression – Beispiel – CO2 – KONZENTRATION

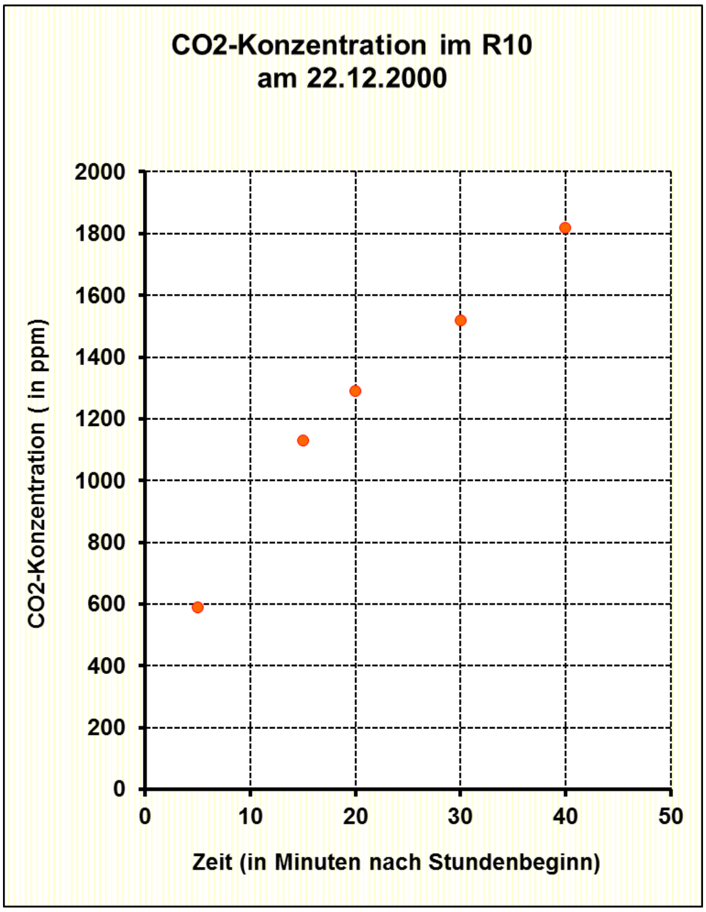
Am 22.12.2014 wurde während einer Mathematikschularbeit der Klasse 2HTA in unregelmäßigen Abständen die CO_2-Konzentration gemessen. Wie die untenstehende Grafik zeigt, stieg die CO_2-Konzentration nahezu gleichmäßig an - und zwar derart, dass es naheliegend scheint, den zeitlichen Verlauf der CO_2-Konzentration durch eine lineare Funktion mathematisch zu modellieren.

a)

1) Ermitteln Sie mit der graphischen Methode der linearen Regression eine passende Trendgerade und geben Sie deren Gleichung an.
2) Zeigen Sie, wie man an der Gleichung der Regressionsgeraden ablesen kann, um wie viel ppm (= parts per million) damals die CO_2-Konzentration pro Minute gestiegen ist und wie viel ppm betrug sie zu Beginn der Stunde betragen hat.

b) Bei einer Konzentration von ca. 4000 ppm zeigen sich bei empfindlicheren Personen schon Symptome wie etwa Kopfschmerz, Müdigkeit, Konzentrationsschwächen etc.

1) Erklären Sie, wie man mit der in a) ermittelten Geradengleichung berechnen kann, wann dieser Wert erreicht worden wäre, hätte sich der CO_2-Anstieg weiter derart fortgesetzt.



MUSTERBEISPIEL 2: MEHRWEGFLASCHEN

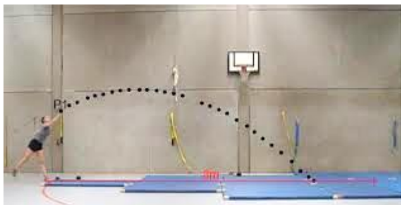
Der Anteil der Mehrwegflaschen im Getränkehandel ist in den letzten Jahren stetig zurückgegangen. Für Deutschland ergeben sich folgende Zahlen (Ähnliches gilt für Österreich):

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Anteil der Mehrwegflaschen (in %)	51,2	49,5	49,2	48,0	46,7	45,7

(Quelle: http://www.umweltbundesamt.de/sites/default/files/medien/384/bilder/8_abb_packmittelgruppen-getraenke_2015-03-05.png)

1) Stellen Sie den Anteil der Mehrwegflaschen in Abhängigkeit von der Zeit t als Punktewolke mit einer linearen Trendlinie grafisch dar (wählen Sie dabei t = 0 für das Jahr 2007).
2) Ermitteln Sie Gleichung der Trendgeraden.
3) Argumentieren Sie anhand des Korrelationskoeffizienten die Güte der Trendgeraden.
4) Berechnen Sie den Anteil der Mehrwegflaschen, der 2019 zu erwarten ist.
5) Ermitteln Sie, in welchem Jahr der Anteil der Mehrwegflaschen unter 40 % gesunken sein wird.

MUSTERBEISPIEL 3: KUGELSTOßEN



Bei einem Kugelstoßtraining wurde die Flugbahn einer Kugel beobachtet und gefilmt und in der folgenden Tabelle festgehalten:

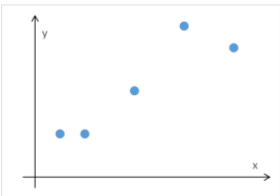
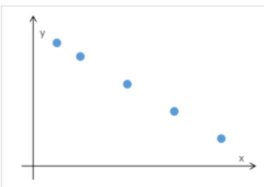
Horizontalentfernung x der Kugel vom Abwurfpunkt (in m)	0	4	8	12	16	18
Höhe h(x) der Kugel über dem Boden (in m)	1,8	4,28	5,16	4,44	2,12	0

1) Stellen Sie die Daten als Punktewolke grafisch dar.

Ermitteln Sie durch Regression die Gleichung der Polynomfunktion 2. Grades, die diese Flugbahn passend beschreibt.

MUSTERBEISPIEL 4: KORRELATION

1) Ordnen Sie jedem Streudiagramm den jeweils zugehörigen Korrelationskoeffizienten r zu. [2 zu 4]

	☐
	☐

A	r ≈ – 0,5
B	r = – 1
C	r ≈ 0,91
D	r ≈ – 0,81